TS

Activité : Champ des tangentes d'une équation différentielle.

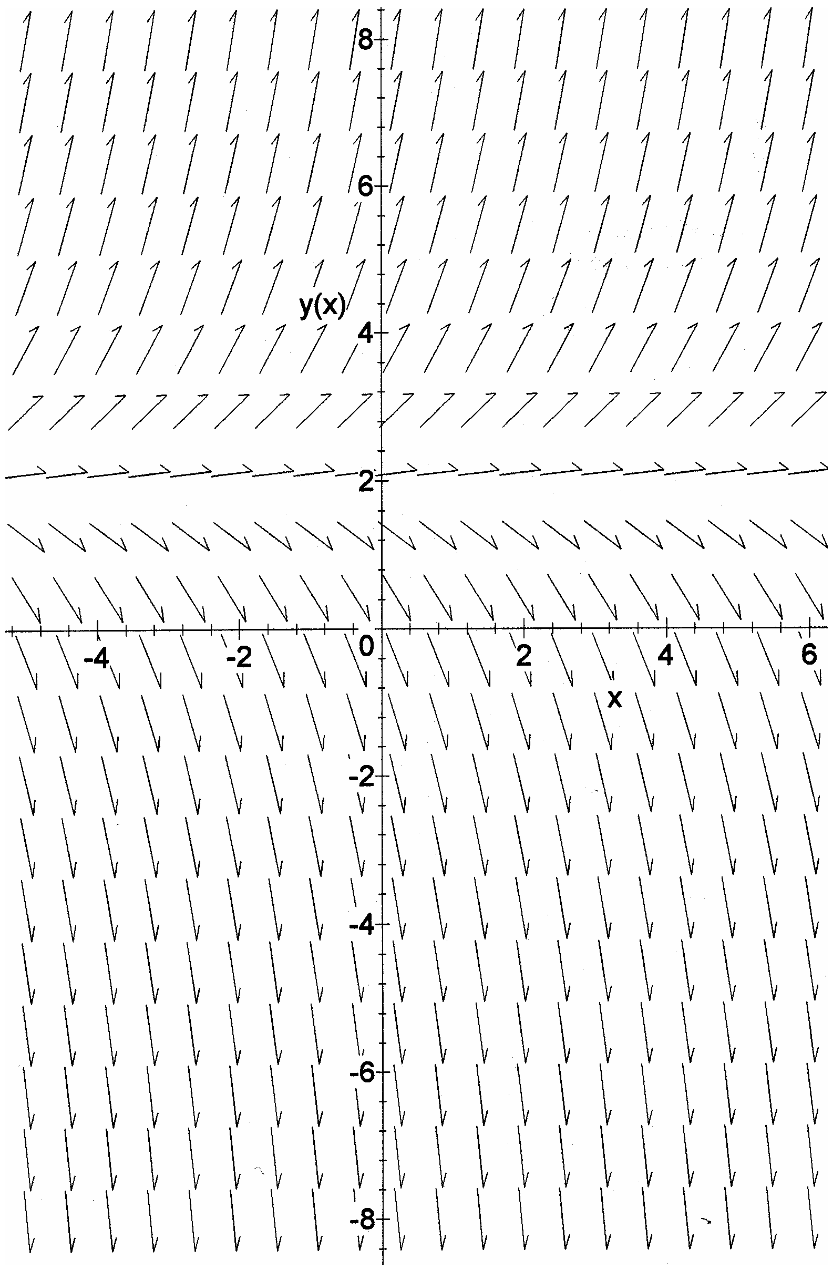
I. Le cas de y ' = ay + b.

A. On considère l'équation différentielle (E) : y ' = y – 2.
On appelle « courbe intégrale » de (E) la représentation graphique d'une solution de (E).

1. Aspect graphique. Compléter le tableau ci-dessous :

y	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y '											

Le long d'une droite parallèle à l'axe des abscisses la valeur du nombre dérivé est la même. On peut alors représenter un vecteur directeur de la tangente en un point quelconque du plan à une courbe intégrale de (E).
C'est ce qui apparaît dans le graphique ci-dessous :



a. Quelle est graphiquement la solution constante ?
b. Représenter sur le dessin ci-dessus la courbe intégrale passant par le point A de coordonnées (0 ; 3).
c. Idem que b. avec les coordonnées (0 ; –1).
d. Quel semble être la particularité commune à toutes les courbes intégrales ?
e. Lorsque x devient grand comment se comportent les courbes intégrales par rapport à la courbe associée à la solution constante ? On dira de celle-ci qu'elle est « instable ».

2. Résoudre l'équation (E) et déterminer en particulier la solution f vérifiant f(0) = 3. Comparer la représentation graphique de f avec votre représentation du 1.b.

B. On considère l'équation différentielle (E_1) : $y' = -y + 1$.

1. Aspect graphique. Compléter le tableau ci-dessous :

y	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y '											

a. Représenter graphiquement le champ des tangentes de (E_1).
b. Quelle est graphiquement la solution constante ?
c. Représenter sur votre graphique la courbe intégrale passant par le point A de coordonnées (0 ; 3).
d. Quel semble être la particularité commune à toutes les courbes intégrales ?
e. Lorsque x devient grand comment se comportent les courbes intégrales par rapport à la courbe associée à la solution constante ? On dira celle-ci « stable ».

2. Résoudre l'équation (E_1) et déterminer en particulier la solution g vérifiant g(0) = 3. Comparer la représentation graphique de g avec votre représentation du 1.b.

II. Le cas de $y' = y^2$

Aspect graphique uniquement. Compléter le tableau ci-dessous :

y	–3	–2	–1	–1/2	0	1/2	1	2	3	4	5
y '											

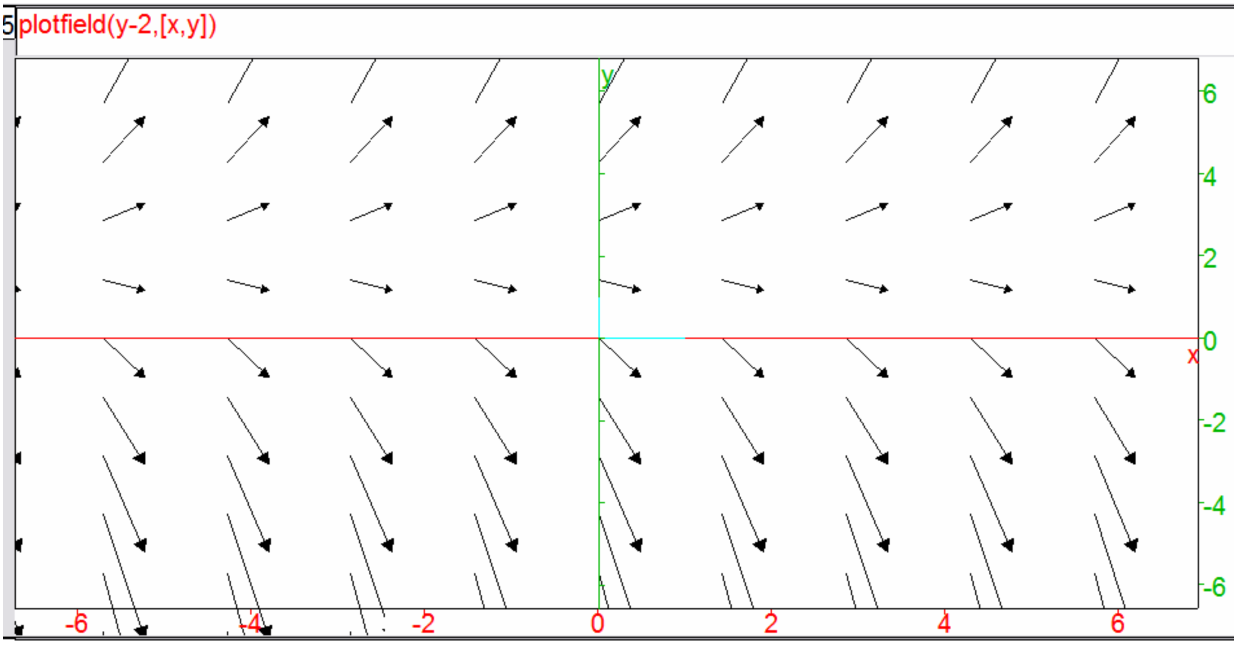
a. Représenter graphiquement le champ des tangentes de (E_1).
b. Quelle est graphiquement la solution constante ?
c. Représenter sur votre graphique la courbe intégrale passant par le point de coordonnées (0 ; 1).
d. Idem que c. avec les coordonnées (0 ; –1).
e. Quel semble être la particularité commune à toutes les courbes intégrales ?
f. Lorsque x devient grand comment se comportent les courbes intégrales par rapport à la courbe associée à la solution constante ? Qu'en est-il de la stabilité de la solution constante ?

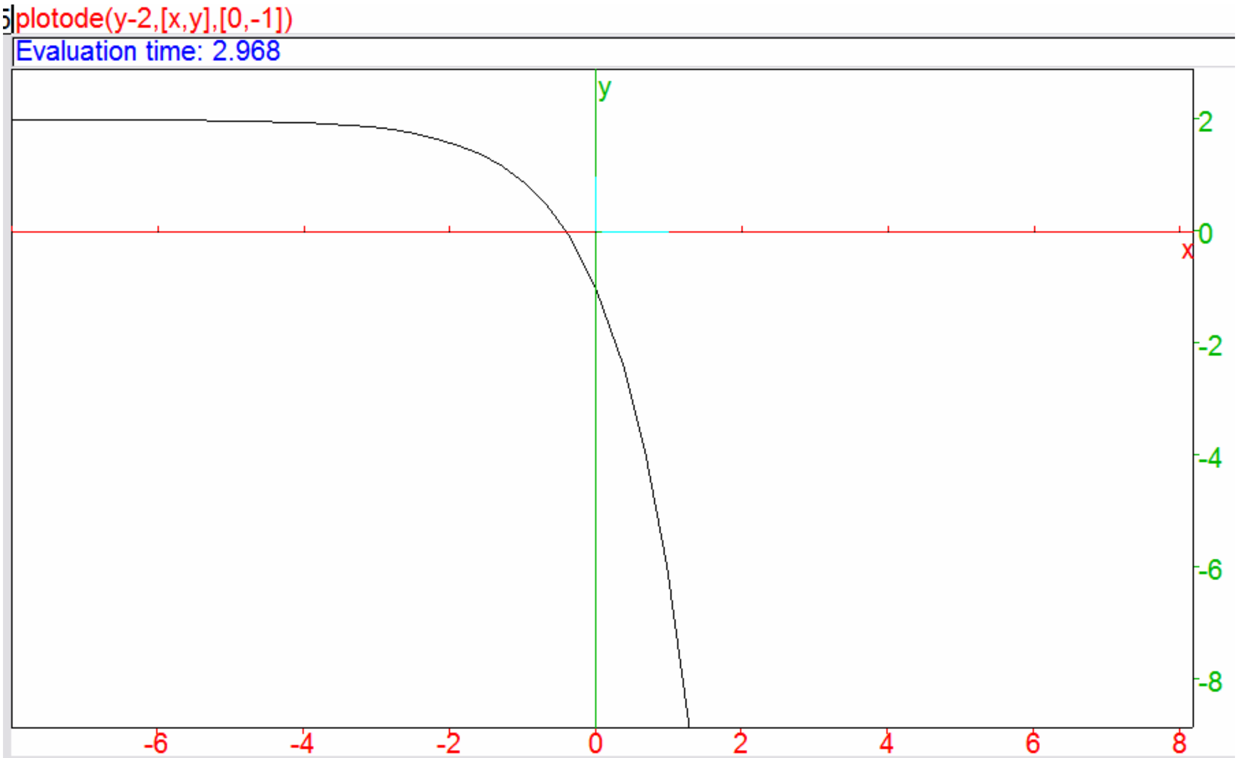
III. Complément TICE.

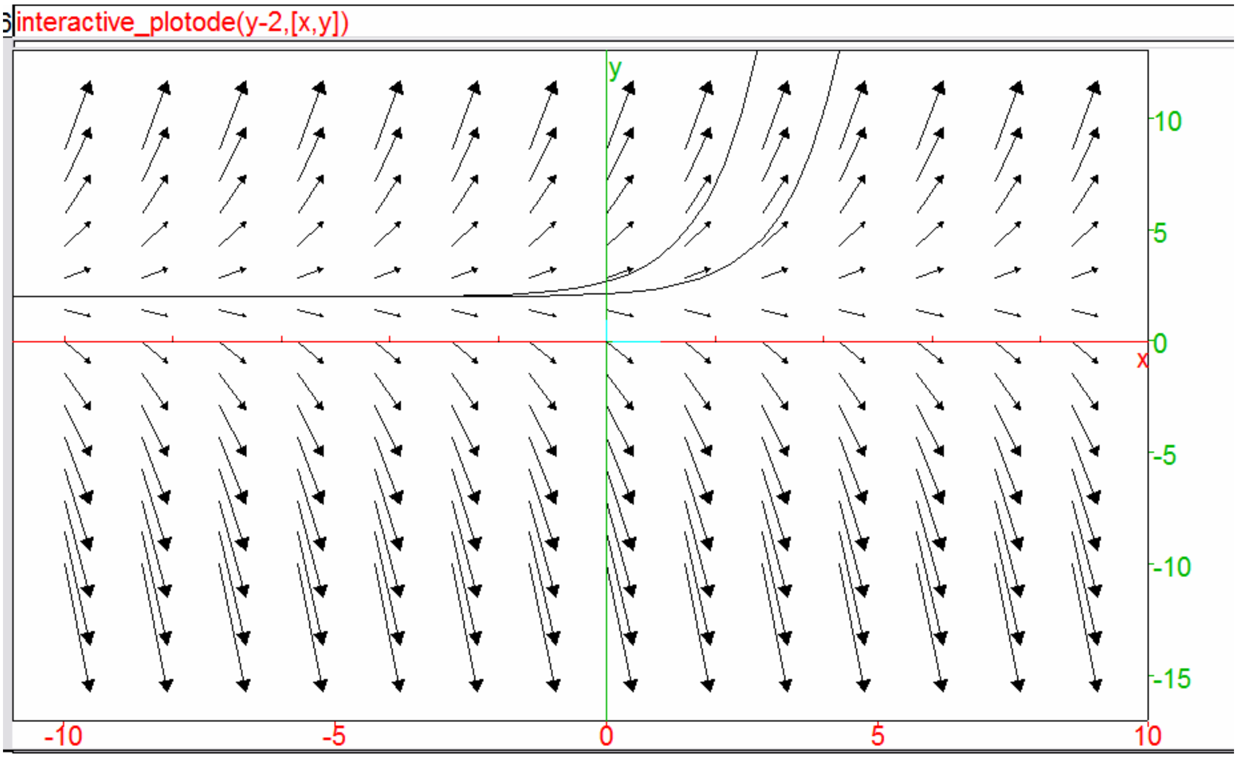
Représentation graphique du champ des tangentes de $y' = y - 2$ sur ordinateur avec le logiciel Xcas.
La fonction `plotode` représente graphiquement la solution d'une équation différentielle, `plotfield` représente le champ des tangentes.

La fonction `interactive_plotode` représente le champ des tangentes et permet de cliquer sur le graphique pour tracer les solutions passant par les points cliqués.
Testez donc :

```
plotfield(y-2,[x,y])
plotode(y-2,[x,y],[0,-1])
erase()
interactive_plotode(y-2,[x,y])
```






interactive_plotode(y-2,[x,y])
y
x
10
5
0
-5
-10
-15
-10
-5
0
5
10