TS

Vers la fonction exponentielle …

Activité 2 : Équation y' = y et y(0) = 1

OBJECTIF : construire pas à pas une solution approchée de l'équation y' = y (méthode d'Euler).

Soit f une solution de l'équation y'= y telle que f (0) = 1 et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On se propose d'approcher la courbe C de f sur l'intervalle [-2 ; 2] par la courbe C' d'une certaine fonction g, affine par morceaux.
On se souvient pour cela que la meilleure approximation affine d'une fonction dérivable f en un point a est la fonction $x \longmapsto f(a) + (x - a) f'(a)$.

A. **À la main.**

Sur l'axe des abscisses, on place les réels -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2. On dit que ces nombres forment une subdivision de l'intervalle [-2 ; 2] de pas h =1.
1. Justifier que la tangente à C au point A_0 d'abscisse 0 admet pour équation $y = x + 1$.

On pose alors $g(x) = x + 1$ pour $x \in [0 ; 1]$. Représenter graphiquement g sur [0 ; 1] ; on obtient ainsi le segment $[A_0 A_1]$.

2. On se place sur l'intervalle [1 ; 2] et on prend g(1) comme approximation du nombre f (1) qui est inconnu.
Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 et en déduire l'expression de la fonction affine g sur [1 ; 2]. Construire sa représentation graphique $[A_1 A_2]$.

3. On se place plus généralement sur l'intervalle [k ; k + 1] où k est un entier compris entre -2 et 1. Justifier que sur cet intervalle, $g(x) = f(k)(x - k + 1)$ et calculer g(k). En déduire une relation entre g(k + 1) et g(k). Achever alors la construction des points A_i pour $-2 \leq i \leq 1$.

B. **Avec un tableur.**

Ouvrez votre tableur favori, par exemple l'excellent et gratuit Openoffice.org Calc,

téléchargeable ici : http://fr.openoffice.org/about-downloads.html#fr

Dans la colonne A du tableur on met les valeurs de *x* variant de 0 à 4 avec un pas de 0,1

qu'on pourra faire varier. Dans la colonne B , on veut mettre les valeurs approchées de f (*x*) :

pour f (0) on mettra la valeur de départ connue donc 1.

Pour les images suivantes, on utilisera valeur précédente + h $\times$ nombre dérivé au point

précédent.

C'est à dire : $f(a + h) = f(a) + h \times f'(a) = f(a) + h \times f(a)$ compte tenu de $f'(x) = f(x)$ pour

tout *x*.

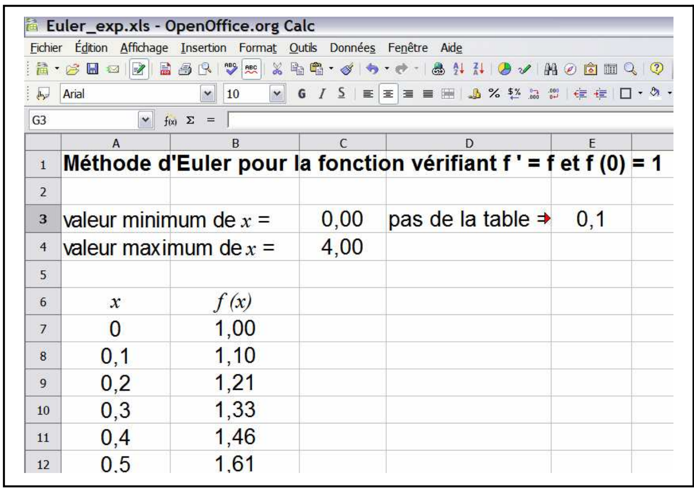
On pourra remarquer que h est l'écart entre la valeur actuelle de *x* et la valeur précédente.

On obtient donc la formule : = cellule d'au-dessus + (variation des x) × (dérivée de f en x)

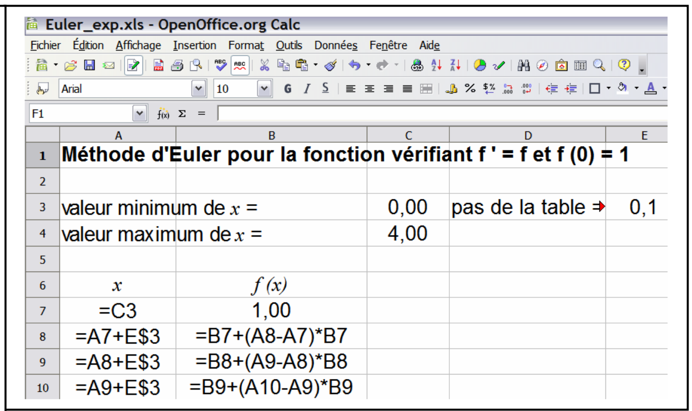
donc = cellule d'au-dessus + (variation des x) × (cellule d'au-dessus)

car f '(x) = f (x)

Voici à quoi cela doit ressembler (dans la 2[e] copie écran les formules sont dévoilées) :



	A	B	C	D	E
1	Méthode d'Euler pour la fonction vérifiant f ' = f et f (0) = 1				
2					
3	valeur minimum de x =		0,00	pas de la table ➔	0,1
4	valeur maximum de x =		4,00		
5					
6	x	$f(x)$			
7	0	1,00			
8	0,1	1,10			
9	0,2	1,21			
10	0,3	1,33			
11	0,4	1,46			
12	0.5	1,61			



	A	B	C	D	E
1	Méthode d'Euler pour la fonction vérifiant f ' = f et f (0) = 1				
2					
3	valeur minimum de x =		0,00	pas de la table ➔	0,1
4	valeur maximum de x =		4,00		
5					
6	x	$f(x)$			
7	=C3	1,00			
8	=A7+E$3	=B7+(A8-A7)*B7			
9	=A8+E$3	=B8+(A9-A8)*B8			
10	=A9+E$3	=B9+(A10-A9)*B9			

Il suffit d'utiliser les formules ci-dessus et de les recopier vers le bas pour arriver jusqu'à la valeur maximale de x. Au niveau « expert », on peut utiliser des tests…

Faire la représentation graphique de ces points en utilisant Insertion Diagramme cocher première colonne comme étiquette puis Suivant choisir le 1[er] type de diagramme en haut gauche etc... On choisira de tracer la courbe sur la même feuille donc à côté des données.

<u>Complément</u> : Dans la colonne C, cellule C7, entrer la formule = exp(A7) puis recopier la formule vers le bas. Comparer les contenus des colonnes B et C. Varier le pas h = 0,1 puis 0,01 puis 0,001. Que constatez-vous ?