

TS

Vers la fonction exponentielle ...

Activité 1 : La loi de décroissance radioactive.

OBJECTIF: traduire la décroissance radioactive et introduire la notion d'équation différentielle.

Le nombre de noyaux (ou d'atomes) d'une source radioactive diminue au cours du temps, tout noyau étant instable et susceptible de se désintégrer. S'il est impossible de prévoir la date de désintégration d'un noyau donné, on admet que la probabilité qu'il se désintègre pendant une unité de temps, est la même pour des noyaux identiques et reste inchangée au cours du temps (un noyau ne vieillit donc pas). Cette probabilité de désintégration, que l'on note k , est donc une caractéristique propre du type de noyaux (appelée constante radioactive ; plus k est grand, plus le nucléide est radioactif). On désigne par N_0 le nombre initial de noyaux de la source radioactive et par $N(t)$ le nombre de noyaux restant (non désintégrés) à l'instant t .

A. Évolution du nombre de noyaux.

1. Exprimer la proportion de noyaux se désintégrant entre les instants t et $t + 1$ à l'aide de $N(t)$ et de $N(t+1)$ et justifier qu'une approximation de $N(t+1)$ est donnée par :

$$N(t+1) \approx (1 - k)N(t).$$

2. On suppose dans cette question que $N_0 = 10\,000$ et $k = 0,1$. Recopier et compléter le tableau ci-contre :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N(t)	10 000									
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N(t)										

Donner la représentation graphique point par point correspondante.

B. Relation entre N et N'.

On suppose la fonction $t \mapsto N(t)$ dérivable sur \mathbb{R} .

1. Justifier que, pour tout réel t , on a : $N(t + 1) \approx N(t) + N'(t)$.
2. Dédurre des questions A1 et B1 que la loi de décroissance du nombre de noyaux peut être modélisée par : $N'(t) = -k N(t)$.

Remarque : Cette équation $N' = -kN$, où l'inconnue N est liée à sa dérivée, est appelée équation différentielle.

Exercice : Les scientifiques caractérisent la radioactivité d'un élément par son temps de demi-vie, ou période radioactive. C'est le temps au terme duquel la moitié des nucléides de l'élément se sont désintégrés. Par exemple, la période radioactive du carbone-14 (^{14}C) est de 5 730 années; celle de l'uranium-238 (^{238}U) est de 4,5 milliards d'années.

1. Calculez la constante radioactive k de ces deux éléments.
2. On suppose que la proportion de (^{14}C), par rapport au carbone (^{12}C) stable, est constante durant la vie d'un animal ou d'une plante qui contient ces éléments. Après sa mort, le (^{14}C) se désintègre. Quel est l'âge d'un échantillon dont le rapport de la proportion de (^{14}C) actuelle et de la proportion initiale est de 0,0031 ?