Chapitre 1 : Les nombres complexes.

I. L'ensemble ℂ et le plan complexe.

1. Introduction des nombres complexes.
   Motivation : résoudre $x^2 + 1 = 0$
   On considère un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$
   Définition : Un nombre est appelé nombre complexe s'il est de la forme $a + ib$ où a et b sont deux réels.
   On note l'ensemble des nombres complexes ℂ.
   On a alors ℝ inclus dans ℂ puisqu'il suffit de prendre $b = 0$ pour obtenir tout réel a.

2. Forme algébrique.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, a et b étant **deux réels**. On dit que ce complexe est écrit sous forme algébrique. a est la partie réelle de z notée Re(z) et b est la partie imaginaire notée Im(z).

3. Points du plan et nombres complexes.

a. On rapporte le plan P à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. a et b sont deux réels. A tout point M du plan de coordonnées (a , b) on associe le complexe
$z = a + ib$ et réciproquement à tout complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a, b).
z est appelé **affixe** du point M et M est le **point image** du complexe z .

b. Affixe d'un vecteur.
Si un vecteur $\vec{k}$ a pour coordonnées (a ,b) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ l'affixe de $\vec{k}$ est le complexe $z = a + ib$.

c. Si $z = ib$ le complexe est dit imaginaire pur et le point associé appartient à l'axe des imaginaires purs de même si z est réel, le point associé appartient à l'axe des réels.

d. Symétries et nombres complexes.

Si M est un point d'affixe $z = a + ib$, le point M_1 symétrique de M par rapport à O a pour coordonnées (-a , -b) et donc pour affixe le complexe $-z$.
Le symétrique de M par rapport à l'axe des réels a pour coordonnées (a , -b) et son affixe est le complexe $a - ib$ qu'on appelle le conjugué de z et qu'on note $\overline{z}$.

II. Opérations dans ℂ.

1. Egalité de deux complexes : Soit $z = a + ib$ et $z' = a + ib'$ deux complexes.
   On a $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$. En particulier un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle ET sa partie imaginaire est nulle
2. Somme : soit $z = a + ib$ et $z' = a + ib'$ deux complexes quelconques, on définit la somme $z + z'$ par $z + z' = a + a' + i (b + b')$.
   Exemple :
3. Produit : soit $z = a + ib$ et $z' = a + ib'$ deux complexes quelconques, on définit le produit $z \times z'$ par $z \times z' = a a' - bb' + i (ab' + a'b')$.
4. Inverse d'un complexe non nul : soit $z = a + ib$ un complexe non nul quelconque,

on définit l'inverse par $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

5. Quotient de deux complexes. Exemple et règle.
6. Puissances du nombre i. $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$ et généralisation + dessin

III. Affixes et géométrie.

Soit A d'affixe z_A et B d'affixe z_B
Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe $z_{\vec{w}}$ et $\vec{w}'$ un vecteur d'affixe $z_{\vec{w}'}$ et k un réel.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$, l'affixe du milieu de [AB] est $\frac{z_A + z_B}{2}$

L'affixe du vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ est la somme $z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$
L'affixe du vecteur $k\vec{w}$ est le complexe $k\, z_{\vec{w}}$

IV. Propriétés des complexes conjugués.

Pour tous complexes z et z' on a :

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Si z' n'est pas nul : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$z + \overline{z} = 2\,\text{Re}(z)$ $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}(z)$

z est réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$

z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\overline{z}$

V. Module d'un nombre complexe.

1. Déf. : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M le point du plan d'affixe z. On appelle module de z et on note $|z|$ le réel positif égal à la distance OM.

   On a donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Propriétés.

   Pour tous complexes z et z' on a : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

   Pour tout entier naturel n on a : $|z^n| = |z|^n$

Si z' n'est pas nul : $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Enfin $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Remarque : $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

3. Distance de deux points : soit A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a :
   $AB = |z_B - z_A|$

VI. <u>Arguments d'un nombre complexe NON NUL.</u>

1. Définition. : Soit z un complexe non nul et M le point d'affixe z. On appelle argument du complexe z et on note arg(z) une mesure de l'angle ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$)
2. Dessin :
3. Remarque : 0 n'a pas d'argument car l'angle ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$) n'est pas défini si M est en O.
4. Forme trigonométrique : soit M un point d'affixe non nulle z = a + ib. M a pour coordonnées polaires [r, θ] avec $r = |z|$ donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette expression s'appelle la forme trigonométrique du complexe z.
5. Propriété : soit z un complexe non nul.

   $z = a + ib$ on a $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

   $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$ on retrouve <u>les coordonnées polaires</u> vues en $1^{ère}$.

6. Exemples : Ecrire la forme trigonométrique de :
   $z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ et $z = -i$ et $z = -1 + \sqrt{3}\,i$

   Inversement si z est un complexe de module 3 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$ sa forme algébrique est : $z = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$

A connaître le tableau suivant des angles « remarquables » :

x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
soit en degrés	*0*	*30*	*45*	*60*	*90*	*120*	*135*	*150*	*180*
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan *x*	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Pour l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$ on utilise les propriétés de parité : sinus est impaire et cosinus est paire.

7. Conséquences immédiates.

a. Tout réel strictement positif a un argument égal à 0.
b. Tout réel strictement négatif a un argument égal à π.
c. Tout imaginaire pur non nul a un argument égal à + ou $-\frac{\pi}{2}$.

8. Arguments et opérations.

Théorème : Quels que soient les complexes non nuls z et z' on a :

$\boxed{\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k\,2\pi}$ $\boxed{\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + k\,2\pi}$

$\boxed{\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k\,2\pi}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \arg(z^n) = n \arg(z)}$

Preuves :

Il nous faut adopter comme pré requis deux formules de trigonométrie de 1ère S.

Pour tout réel a et tout réel b, on a :

cos (a + b) = cos(a) cos(b) – sin(a) sin(b)
sin (a + b) = sin (a) cos(b) + cos(a) sin(b)

Soit maintenant z et z' deux complexes quelconques qu'on peut écrire sous forme trigonométrie :
$z = = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

On a alors : $zz' = rr'((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'))$
$= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$

Puis $z' \times \frac{1}{z'} = 1$. Donc $\arg(z') + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = 0 + k\,2\pi$ (0 est un argument de 1)

VII. <u>Equations dans $\mathbb{C}$.</u>

1. Equations du 1er degré à une inconnue complexe z.

La méthode de résolution est EXACTEMENT la même que dans $\mathbb{R}$.
On isole l'inconnue complexe z.

Exemple : résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(2+i)z - (3-i) + 2iz = -3i + (4+i)z$

Réponse : la solution est le complexe $-\frac{7}{4} + \frac{1}{4}i$

2. Equations du second degré.

a. Définition. : Soit a, b, c trois réels avec a non NUL. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ est appelée équation du second degré à une inconnue complexe z et à coefficients réels.
Le DISCRIMINANT de cette équation noté Δ est le REEL $b^2 - 4ac$.

b. Théorème : Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$

Si $\Delta > 0$ elle a deux solutions réelles : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$ elle a une solution réelle : $\frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$ elle a deux solutions complexes CONJUGUEES : $\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Preuve : $f(z) = az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ forme canonique…

Exemple : Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 3z + 9 = 0$

Réponse : deux solutions complexes $\frac{3 \pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$