# Chapitre 3 : Dérivation.

## I. Dérivabilité en un point (aspect local).

Dans la suite, on considère une fonction définie sur un intervalle I et $x_0$ un réel de I qui n'est pas une extrémité de I.

1. Définition :

   On appelle taux de variation de f en $x_0$ la fonction $T_{x0}$ définie par :
   $$h \longmapsto T_{x0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
   Cette fonction est définie pour tout réel h non nul et tel que $x_0 + h$ soit dans I.

2. Théorème (admis) : Il y a équivalence entre les énoncés suivants :
   (1) Le taux de variation de f en $x_0$ admet une limite finie L quand h tend vers 0.
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$$

   (2) Il existe un réel L et une fonction $\varphi$ définie pour les réels h non nuls et tels que $x_0 + h$ soit dans I vérifiant :
   $f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + h\,\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

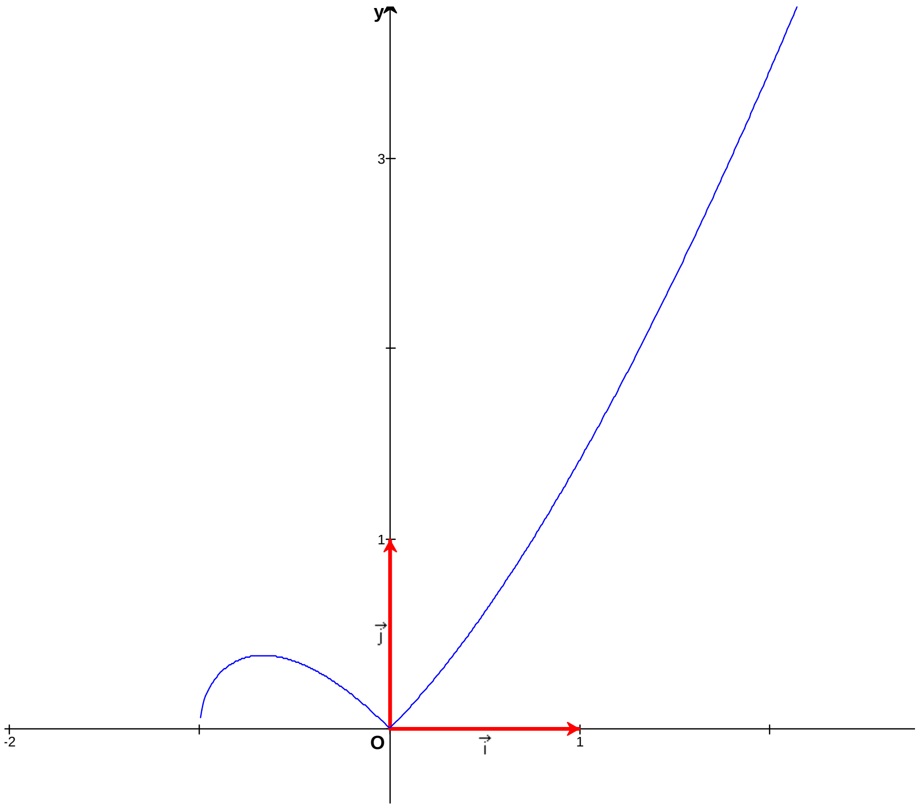
3. Définition : a) Lorsque l'une des conditions (1) ou (2) du théorème est vérifiée on dit que la fonction f est dérivable en $x_0$.
   b) Le réel L est noté $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en $x_0$.
   c) L'égalité $f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + h\,\varphi(h)$ s'appelle développement limité d'ordre 1 de f en $x_0$.

4. Interprétation graphique : Coefficient directeur de la tangente en $x_0$.
   Soit f dérivable sur I et $M_0(x_0 ; f[x_0])$ un point de la courbe $\mathscr{C}$
   La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente en $M_0$ d'équation :

   $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ + DESSIN !

5. Exemples : a) f définie sur $\mathbb{R}$, par : $x \longmapsto ax + b$ et $x_0$ un réel quelconque.
   b) f définie sur $\mathbb{R}$, par : $x \longmapsto x^2$ et $x_0$ un réel quelconque.

6. Contre-exemples :
a) $x \longmapsto |x|$ en 0 notion de nombre dérivé <u>à droite (= 1) ou à gauche</u> (= – 1)
b) $x \longmapsto \sqrt{x}$ en 0 notion de demi-tangente verticale lorsque la fonction taux a une limite infinie.
c) $x \longmapsto \sqrt{x^3 + x^2}$ cumule les deux cas ci-dessus.




7. Théorème : Une fonction f dérivable en $x_0$ est continue en $x_0$.
Preuve : On utilise $f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + h\,\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$
pour justifier aisément que f(x) tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers $x_0$

Réciproque fausse : contre-exemple $x \longmapsto |x|$ en 0

II. Dérivation sur un intervalle. Fonction dérivée. (aspect global)

1. Définition : Soit f une fonction définie et dérivable en tout réel $x_0$ d'un intervalle I. On peut alors définir une nouvelle fonction appelée fonction dérivée de f, notée f ', par :

   $\forall\, x \in I$, f '(*x*) = nombre dérivé de f en x.

2. Notation différentielle : dy = f '(*x*) dx provient de $f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + h\,\varphi(h)$

   D'où $f' = \dfrac{dy}{dx}$ on note aussi $\dfrac{df}{dx} = f'$

3. Fonctions dérivées des fonctions usuelles.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fonctions f | $x \longmapsto k$<br>k réel fixé | $x \longmapsto x^n$<br>$n \in \mathbb{N}$ | $x \longmapsto 1/x^n$<br>$n \in \mathbb{N}$ | $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $x \longmapsto \sin x$ | $x \longmapsto \cos x$ |
| Dérivées f' | $x \longmapsto 0$ | $x \longmapsto nx^{n-1}$ | $x \longmapsto -nx^{-n-1}$ | $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $x \longmapsto \cos x$ | $x \longmapsto -\sin x$ |
| Intervalles de validité | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |

4. Opérations sur les fonctions dérivables.

Théorème :
On considère deux fonctions u et v dérivables sur un même intervalle I.
Soit k un réel quelconque.
k u est dérivable sur I de dérivée k u'
u + v est dérivable sur I de dérivée u' + v'
$u \times v$ est dérivable sur I de dérivée u' v + u v'

Si de plus v ne s'annule pas sur I :

$\frac{1}{v}$ est dérivable sur I de dérivée $\frac{-v'}{v^2}$

$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice : Faire les preuves de ces résultats

## III. Etude du sens de variation et des extremums des fonctions.

1. Le théorème fondamental liant le signe de la dérivée f ' au sens de variation de f. (admis)

Th. 1 : Soit f une fonction dérivable sur I.
Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I.
Si $f' \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I.
Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.

2. Th. 2 : Soit f une fonction dérivable sur I. Si f admet un extremum local en $x_0$ réel dans I (qui n'est pas une extrémité de I) alors $f'(x_0) = 0$.
On peut énoncer : une condition nécessaire pour que f admette un extremum en $x_0$ est que la dérivée de f s'annule en $x_0$.

3. Th. 3 : Soit f une fonction dérivable sur I.
f admet un extremum local en $x_0$ réel dans I (qui n'est pas une extrémité de I) si et seulement si f ' s'annule en $x_0$ en changeant de signe.
Du + au – : il s'agit d'un maximum.
Du – au + : il s'agit d'un minimum.

## IV. Compléments sur la dérivation.

1. Dérivées successives.

a) Définition : Soit f dérivable sur I. Si sa dérivée f ' est dérivable sur I sa dérivée (f' )' est appelée dérivée seconde de f est notée logiquement f ''.
On généralise pour définir une dérivée troisième, quatrième, n-ième notée $f^{(n)}$.

b) Exemples :

1°) Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.
f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f ' est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x - 10$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'''(x) = 6$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $f^{(n)}(x) = 0$

2°) Soit la fonction g définie pour tout réel x par : $g(x) = \sin(x)$.
g est une fonction de référence dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée g' est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et ainsi de suite ; la dérivée n-ième existe pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice : Prouver que $\left(\sin(x)\right)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $\mathbb{R}$.

c) Complément : convexe, concave
Th : si $f'' \geq 0$ sur I alors la courbe associée est convexe (située au-dessus de ses tangentes).
si $f'' \leq 0$ sur I alors la courbe associée est concave (située en dessous de ses tangentes).
Exemples : fonction carrée, fonction cube.

2. <u>Dérivée d'une fonction composée.</u>

a) Théorème : Soit u dérivable sur un intervalle I et v dérivable en u(x) pour tout x dans I.
Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$
Soit pour tout x dans I : $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

b) Exemple : $\left(\cos(1 + x^2 - 2x^3)\right)' = -\sin(1 + x^2 - 2x^3) \times (2x - 6x^2)$

c) Corollaire 1 : Soit u dérivable sur un intervalle I ; pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors $u^n$ est dérivable sur I et : $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

Exemple : $\left((x^3 + 3x - 5)^{2006}\right)' = 2006(x^3 + 3x - 5)^{2005} \times (3x^2 + 3)$

Si $n < 0$ et si u ne s'annule pas sur I alors la fonction $u^n$ est dérivable sur I et :

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$$

d) Corollaire 2 : Soit u dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I. La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$