

Chapitre 4: La fonction exponentielle.

I Définitions et propriétés immédiates.

1. Définition : f désigne une fonction quelconque définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'égalité $f' = af$ (a réel quelconque) est appelée équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre. **L'inconnue** de cette équation est une FONCTION.
2. Définition : Résoudre l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre $y' = ay$, où a est un réel quelconque fixé, c'est trouver les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x , on ait $f'(x) = a \times f(x)$.
3. Propriété : S'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle du 1^{er} ordre $y' = y$ et telle que $f(0) = 1$ alors elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve : soit f une telle fonction et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) \times f(-x)$ g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et
 $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = 0$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $g(0) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1$ et il ne peut exister x_0 tel que $f(x_0) = 0$ car on aurait alors $g(x_0) = 0$.

4. Théorème : Il existe une fonction et une seule définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$

Preuve : l'existence est ADMISE. Prouvons l'unicité : soit g une deuxième fonction vérifiant $g' = g$ et $g(0) = 1$

f ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $\frac{g}{f}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = 0 \text{ donc } \frac{g}{f} \text{ est constante sur } \mathbb{R} \text{ et sa valeur en } 0 \text{ est } 1$$

d'où le résultat.

5. Définition : On appelle fonction exponentielle l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Notation : $\exp$

II. Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

1. La propriété fondamentale : Quels que soient les réels a et b :

$$\boxed{\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)}$$

Preuve : soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(a + b - x) \times f(x)$ où f est la fonction exponentielle. g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (-1) f'(a + b - x) \times f(x) + f(a + b - x) \times f'(x) = 0$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $g(0) = f(a+b)$ et $g(b) = f(a) \times f(b)$ 1 donc $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

2. Autres propriétés algébriques.

Quels que soient les réels a et b et l'entier n ,

$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$	$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$	$(\exp(a))^n = \exp(na)$
--------------------------------	---------------------------------------	--------------------------

Preuves : $\exp(2a) = \exp(a+a) = (\exp(a))^2$ $\exp(-a) \times \exp(a) = \exp(0) = 1$

Comme $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ $\exp(-a)$ est l'inverse de $\exp(a)$

Donc $\exp(a-b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Raisonnement par récurrence sur n entier naturel puis si n est négatif, $-n$ est positif

et $\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)} = \frac{1}{(\exp(a))^{-n}} = (\exp(a))^n$

3. Théorème : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Preuve : pour tout réel a on a : $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ et donc $\exp(a) = \left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$

4. Théorème : La fonction exponentielle est la seule fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ non nulle vérifiant $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ et $f'(0) = 1$

Preuve : soit g une autre fonction vérifiant ces deux conditions.

Pour tout réel x et tout réel a on a donc $g(a+x) = g(a) \times g(x)$ et en dérivant on obtient

$g'(a+x) = g(a) \times g'(x)$ d'où $g'(a+0) = g(a) \times g'(0)$ d'où $g'(a) = g(a)$ ceci pour tout réel a . Donc la fonction g vérifie $g' = g$ et de plus $g(a+0) = g(a) \times g(0)$.

Or g est non nulle donc il existe un réel a au moins tel que $g(a) \neq 0$, en utilisant ce réel particulier on obtient $g(0) = 1$

On conclut alors grâce au théorème vu en I.4

III. Etude de la fonction exponentielle.

1. La notation $x \mapsto e^x$

L'image de 1 par la fonction exponentielle est un réel noté e . Or on sait que $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = e^n$ pour n dans $\mathbb{N}$.

Par extension on note e^x le réel $\exp(x)$.

2. Résumé des propriétés : la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$e^0 = 1$ et $e^{a+b} = e^a \times e^b$

3. Théorème : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve : On sait que $\exp(x) > 0$ pour tout x et comme $(\exp)' = \exp$ on a le résultat annoncé.

4. Limites.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0}$$

Preuve : On prouve d'abord que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x . Pour cela on étudie la fonction différence d définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, d(x) = e^x - x - 1$. Cette fonction admet un minimum sur $\mathbb{R}$ égal à 0 (calculer sa dérivée !) d'où le résultat annoncé puis la limite en utilisant un théorème de COMPARAISON.
Puis par changement de variable $X = -x$ on obtient le résultat en $-\infty$.

5. Tableau de variations et représentation graphique.

6. Approximation affine au voisinage de 0.

$$\text{Théorème : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Preuve : cela découle de la dérivabilité de la fonction exp en 0.

Donc l'approximation affine au voisinage de 0 s'écrit .

$$e^x = 1 + x + o(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} o(x) = 0$$

7. Autres limites.

$$\text{Croissance comparée : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0}$$

Preuve : On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ on démontre qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (étudier sa dérivée) d'où $f(x) > f(0) = 1$ donc
 $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ puis en supposant $x > 0$, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

puis la limite en utilisant un théorème de COMPARAISON puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

Pour l'autre résultat on pose $X = -x$ donc $x e^x = \frac{X}{e^{-X}}$ avec X qui tend vers $+\infty$.

On applique le résultat précédent.

IV Résolution d'équations et d'inéquations.

On sait que exp est une bijection strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$$

et

$$\boxed{e^a > e^b \Leftrightarrow a > b}$$

Exemple : $e^{x^2+1} = e^{2x-7} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 8 = 0$ qu'on résout classiquement ($\Delta < 0$ donc pas de solution).

V Dérivée de $e^{u(x)}$.

1. Théorème : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et : $(\exp \circ u)' = (\exp \circ u) \times u'$

Ou encore : $\forall x \in I, (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$

2. Exemples : $(e^{x^2+2x})' = (e^{x^2+2x}) \times (2x+1)$ pour tout réel x

$(e^{\sin x})' = (e^{\sin x}) \times \cos x$ pour tout réel x

$(\exp(\sqrt{x}))' = (\exp(\sqrt{x})) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout réel x strictement positif

VI Equation différentielle $y' = ay$.

1) Théorème : Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle du 1^{er} ordre $y' = ay$ notée (E), où a est un réel quelconque non nul, sont les fonctions définies par : $f(x) = C \times e^{ax}$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Preuve : On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C \times e^{ax}$, pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

a) Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. On vérifie aisément que f est solution de (E) donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$.

b) Réciproquement soit g une solution de (E) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) \times e^{-ax}.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = g'(x) \times e^{-ax} + (-a) g(x) \times e^{-ax} = e^{-ax} \times (g'(x) + (-a) g(x)) = 0.$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}$, et $f = C$ d'où : $g(x) = C \times e^{ax}$. Donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$

Finalement $\mathcal{S} = \mathcal{F}$ c'est ce qu'il fallait démontrer...

2) Théorème : Solution vérifiant une condition particulière.

Soit $(x_0; y_0)$ un couple de réels.

Il existe une fonction f et une seule solution de $y' = ay$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Preuve : Les solutions sont de la forme : $f(x) = C \times e^{ax}$ pour tout réel x .

Or :

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow C \times e^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow C = \frac{y_0}{e^{ax_0}} \quad (\text{Cette constante existe parce que l'exponentielle ne s'annule jamais et elle est bien évidemment unique})$$

Donc f existe et f est unique. C'est ce qu'il fallait démontrer...

Exemple : Trouver la solution f de $y' = -3y$ telle que $f(-4) = -1$

VII Équation différentielle $y' = ay + b$.

1) Théorème : Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle du 1^{er} ordre $y' = ay + b$ notée (E), où a et b sont deux réels quelconques $a \neq 0$, sont les fonctions définies par : $f(x) = C \times e^{ax} - \frac{b}{a}$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Remarque : la fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution particulière de (E).

Preuve : On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

a) Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. On vérifie aisément que f est solution de (E) donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$.

b) Réciproquement soit g une solution de (E) donc g appartient à $\mathcal{S}$.

Soit $f = g + \frac{b}{a}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = g'(x) = ag(x) + b$ pour tout réel x .

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a f(x) - b + b$ donc f est solution de l'équation $y' = ay$
Donc $f(x) = C \times e^{ax}$ d'après le théorème vu en VI.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C \times e^{ax} - \frac{b}{a}$

Donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$

Finalement $\mathcal{S} = \mathcal{F}$ c'est ce qu'il fallait démontrer...

2) Théorème : Solution vérifiant une condition particulière.

Soit $(x_0; y_0)$ un couple de réels. Il existe une fonction f et une seule solution de $y' = ay$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Preuve : Les solutions sont de la forme : $f(x) = C \times e^{ax} - \frac{b}{a}$.

Or :

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow C \times e^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0 \Leftrightarrow C = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{-ax_0}.$$

Cette constante existe parce que l'exponentielle ne s'annule jamais et elle est bien évidemment unique.

Donc f existe et f est unique. C'est ce qu'il fallait démontrer...

Exemple : Trouver la solution f de $y' = -5y + 2$ telle que $f(-4) = -1$