Chapitre 6 : Probabilités.

I. Rappels. Vocabulaire probabiliste.

Vocabulaire	signification
expérience aléatoire ou **épreuve aléatoire**	expérience soumise au hasard ayant **plusieurs issues possibles** (au moins deux) notées : $e_1, e_2, \ldots e_n$.
éventualité e_i	chaque issue possible
univers ou événement certain: Ω (ensemble fini dans ce chapitre mais peut être infini)	ensemble de toutes les éventualités liées à une épreuve
événement	Tout sous-ensemble A de l'univers Ω
résultat	L'expérience étant faite le résultat est ce qui est effectivement arrivé
Un événement A **s'est réalisé**	Le résultat de l'expérience est une éventualité appartenant à l'événement A
Cardinal de Ω noté card (Ω)	Nombre total d'issues possibles de l'expérience
cardinal d'un événement A : card (A)	nombre d'éventualités qui composent A
événement **élémentaire** : $\{e_i\}$ avece_i appartenant à Ω	événement ayant une seule éventualité : e_i
événement **(A ou B)** noté $A \cup B$	événement constitué de la réunion des éventualités constituant A avec les éventualités constituant B
événement **(A et B)** noté $A \cap B$	événement constitué des éventualités appartenant à la fois à A et à B
A et B sont deux événements **incompatibles.**	$A \cap B = \varnothing$ A et B ne peuvent pas se réaliser simultanément
A et B sont deux événements **contraires.** Notation : $B = \overline{A}$	$A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$ A et B ne peuvent pas se réaliser simultanément mais l'un des deux se réalise obligatoirement

L'ensemble de tous les événements liés à une expérience aléatoire – pour laquelle l'univers est **fini** – est l'ensemble de toutes les parties de l'univers Ω ; on note cet ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à six faces.

a. Une éventualité est : **3**
b. L'univers Ω est : **{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }**
c. Un événement élémentaire est (par exemple) : **{ 1 }**
d. Un événement est (par exemple) : **{ 1 ; 2 ; 3 }**
e. Deux événements incompatibles sont (par exemple) : **{ 1 ; 2 ; 3 } et { 4 ; 6 }**
f. Deux événements contraires sont (par exemple) : **{ 1 ; 2 ; 3 } et { 4 ; 5 ; 6 }**
g. Soit A l'événement { 1 ; 5 ; 6 } et B l'événement { 1 ; 2 ; 3 ; 6 }.

   $A \cap B =$**{ 1 ; 6 }** $A \cup B =$ **{ 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 }**

h. On suppose que l'expérience est faite et que le résultat est 2.
   A s'est-il réalisé ? **NON** B s'est-il réalisé ? **OUI**

2. Probabilité sur un univers **fini.**

a. Définition 1 : Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire.
On définit une **loi de probabilité** sur Ω si à chacune des issues e_1, e_2, ..., e_r d'une expérience aléatoire on associe un réel appelé **probabilité** p_l, p_z, ..., p_r, avec les propriétés suivantes :

- ils sont tous compris entre 0 et 1 : $0 \leq p_i \leq 1$ pour tout i.
- la somme de ces nombres vaut 1 : $\sum_{i=0}^{r} p_i = 1$.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent ;
- La probabilité de l'événement impossible est 0, ainsi p (∅) = 0.

b. Définition 2 : La loi de probabilité est dite **uniforme** si tous les réels p_i sont égaux.

3. Propriété : Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire et A et B deux événements.

Si A et B sont incompatibles; alors p (A ∪ B) = p (A) + p (B)
sinon : $\boxed{\mathbf{p\,(A \cup B) = p\,(A) + p\,(B) - p\,(A \cap B)}}$

4. Équiprobabilité. Si on peut munir Ω de la probabilité uniforme, on a pour tout événement E :

$$\boxed{p(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)}}$$ On dit qu'il y a équiprobabilité dans Ω.

II. Notion de variable aléatoire.

1. Définition : Lorsqu'à chaque éventualité e_i de l'univers Ω, on fait correspondre un nombre réel quelconque, on dit qu'on a défini une **variable aléatoire** sur Ω et on la note X (par exemple).
L'univers image de la variable aléatoire X est l'ensemble des nombres réels $X(e_i)$. On note $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ cet ensemble.
Pour toute valeur x_i de l'univers image, l'ensemble des éventualités **e** telles que X(**e**) = x_i est un événement, noté $(X = x_i)$.

Exemple. Une urne contient dix boules indiscernables: une jaune, deux rouges, trois vertes et quatre bleues. Une boule jaune tirée fait perdre 3 €. Une boule rouge fait perdre 2 €. Une boule verte fait gagner 1 € et enfin une boule bleue tirée fait gagner 4 €.
Notons alors **X la variable aléatoire « Gain du joueur, en € ».**
On a : $X(\Omega)$ = **{ -3 ; -2 ; 1 ; 4 }**

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

a) Définition. : On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X, la donnée des probabilités p_i des événements $(X = x_i)$. On note $p_i = p(X = x_i)$ $1 \leq i \leq n$

b) On reprend l'exemple ci-dessus.

x_i	**-3**	**-2**	**1**	**4**
$p(X = x_i)$	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**

3. Espérance et variance d'une v.a.

a) Définition : L'espérance d'une v.a. X est le nombre réel, noté E(X), défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

b) Exemple : on reprend l'exemple ci-dessus ; on a E(X) = **1,2** (gain moyen en Euros)

c) Définition : La variance d'une v.a. X est le nombre réel, noté V(X), défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i$$

L'écart-type d'une v.a. X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

d) Théorème : $\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$

C'est la formule pratique de calcul.

e) Exemple : V(X) = **6,96** et $\sigma(X) \approx$ **2,64** (en €)

4. Distribution de fréquences. On répète *n* fois l'expérience dont les issues sont e_1, e_2, ... e_r .
Pour chacune des issues possibles, on calcule ses fréquences de réalisation f_1, f_2,…f_r.
La distribution de fréquences est l'ensemble { f_1, f_2,… f_r.}.
Chaque fréquence est comprise entre 0 et 1.
La somme de ces fréquences est 1 : $f_1 + f_2$, + … + $f_r = 1$.

5. Loi des grands nombres : c'est Jacques Bernoulli (1654-1705) qui l'énonça.

Si l'on répète n fois la même expérience de manière indépendante, dans les mêmes conditions, et si n tend vers l'infini (= devient très grand), alors la fréquence d'une issue tend vers la probabilité de cette issue.

III. Probabilité conditionnelle.

1. Exemple introductif.

Dans une loterie 100 billets sont mis en vente dont 20 gagnants. On répartit les billets dans 100 enveloppes dont 60 sont de couleur bleue et 40 sont de couleur jaune. On met les 100 enveloppes dans une urne et une personne choisit une enveloppe au hasard.
On note G l'événement « La personne gagne », B l'événement « La personne a choisi une enveloppe bleue », J l'événement « La personne a choisi une enveloppe jaune ».

a. Calculer la probabilité de G et celle de B.
b. On suppose qu'on connaît la répartition des billets dans les enveloppes : 10 billets gagnants sont dans une enveloppe bleue et 10 billets gagnants sont dans une enveloppe jaune. On choisit une enveloppe, on voit sa couleur bleue : quelle est alors la probabilité de gagner ? Même question si l'enveloppe est jaune.
c. On vous demande de répartir les billets gagnants dans les enveloppes de manière que la probabilité de gagner ne « dépende pas » de la couleur de l'enveloppe. Comment procédez-vous ?

2. Définition. On considère un ensemble Ω sur lequel est définie une probabilité p, et deux événements A et B tels que p(B) **non nulle.**
On appelle probabilité de l'événement A sous condition (ou sachant) que l'événement B s'est réalisé le quotient $\frac{p(A \cap B)}{P(B)}$ noté $p_B(A)$

Donc : $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{P(B)}$

p_B est une nouvelle probabilité, dite « conditionnelle », définie au moyen de la probabilité p : elle a toutes les propriétés d'une probabilité.

3. Propriétés :

a. Si A est un événement, $0 \leq p_B(A) \leq 1$.
b. $p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1$
c. En situation d'équiprobabilité : $p_B(A) = \frac{\text{cardinal } (A \cap B)}{\text{card}(B)}$
d. si $p(A) \neq 0$ et si p B) $\neq 0$ alors $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$

IV. Formule des probabilités totales.

1. Un cas particulier important : soit A un événement de probabilité non nulle et différente de 1. On a donc $p(\overline{A}) \neq 0$.

   Soit B un événement quelconque, on a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ et donc :

   $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p_A(B) \times p(A) + p_A(B) \times p(\overline{A})$

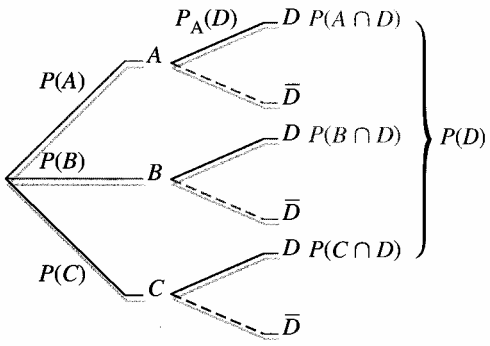
2. Généralisation à une partition de Ω en n éléments distincts de probabilités non nulles.

   $p(B) = p_{A1}(B) \times p(A1) + p_{A2}(B) \times p(A2) + \ldots.. + p_{An}(B) \times p(An)$

3. Utilisation d'un arbre de probabilités.

C. Un arbre de probabilités

Au premier niveau d'un arbre de probabilités, on indique les probabilités des événements A, B et C ; au second niveau, les probabilités conditionnelles.
Un arbre comporte des *nœuds* et des *branches*.



On applique les **règles** suivantes :

• La somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un même nœud est égale à 1, par exemple : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

• La probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin, ainsi :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) .$$

En bout de branche apparaissent ainsi les probabilités des intersections.

• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement : $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

V. Indépendance en probabilités.

1. Théorème et définition.
   A et B sont deux événements de probabilités non nulles.
   Il y a équivalence entre les trois égalités suivantes :

   (i) $p_B(A) = p(A)$ (A est indépendant de B)
   (ii) $p_A(B) = p(B)$ (B est indépendant de A)
   (iii) $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

   Lorsqu'une de ces égalités est vraie on dit que A et B sont indépendants par rapport à la probabilité p.

2. Répétition d'une expérience n fois dans des conditions exactement identiques.

   Principe : « le hasard n'a pas de mémoire » et donc si on répète n fois la même expérience et si E est un événement en notant E_i cet événement E lors de la i-éme répétition on a :
   $p(E_1 \cap E_2 \ldots\ldots \cap E_n) = p(E)^n$.
   Il y a en effet « indépendance » entre les n événements E_i.

3. Variables aléatoires indépendantes :
   Soit X et Y deux v.a. et $X(\Omega) = \{x_1, \ldots x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots y_q\}$

   On dit que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque pour tout i = 1…..p et tout j = 1….q les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.