

Exercice type.

Énoncé :

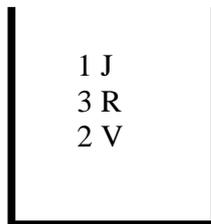
Dans un sac il y a six jetons : un jeton jaune, trois jetons rouges et deux jetons verts.

Le jeu consiste à tirer sans remise deux jetons.

On gagne 5 euros en tirant le jeton jaune, on perd 10 euros par jeton rouge tiré, on gagne 20 euros par jeton vert tiré.

1. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire « gain du joueur » notée G .
2. Calculer l'espérance de G . Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Calculer la variance de G .
4. Un jeu est dit équitable si l'espérance de G est nulle. Rendre le jeu équitable en modifiant le montant du gain versé pour le jeton jaune tiré.

Solution :



Urne contenant $n=6$
boules.
On en prélève $p = 2$
Sans remise

1. Quel est le modèle de tirage ? **On peut opter pour le modèle 3 : tirage simultané. Cependant l'option du modèle 2 est envisageable quoique déconseillée.**
2. Du 1. déduire ce qu'est une issue possible. **Une issue possible est une combinaison de taille 2 ou paire $\{i ; j\}$ i et j étant deux jetons distincts ou mieux deux nombres entiers distincts compris entre 1 et 6 représentant les jetons.**
3. Quel est le cardinal de Ω ?
le cardinal de Ω est le nombre de combinaison de taille 2 dans un ensemble de taille 6 soit $\frac{6 \times 5}{2} = 15$.
4. Peut-on faire l'hypothèse d'équiprobabilité et munir Ω de la probabilité uniforme ?
Il semble raisonnable de faire cette hypothèse : donc on munit Ω de la probabilité uniforme.
5. Dans le cas où l'on étudie une variable aléatoire, quel est l'univers image $X(\Omega)$?
 $X(\Omega) = \{-20 ; -5 ; 10 ; 25 ; 40\}$
En effet une paire :
 $\{\text{Rouge, Rouge}\}$ aboutit à une perte de 20 €.
 $\{\text{Jaune, Rouge}\}$ aboutit à une perte de 5 €.
 $\{\text{Rouge, Vert}\}$ aboutit à un gain de 10 €.
 $\{\text{Jaune, Vert}\}$ aboutit à un gain de 25 €.
 $\{\text{Vert, Vert}\}$ aboutit à un gain de 40 €.

6. Déterminer le cardinal de l'événement qui vous intéresse : si la réponse à la 4. est oui faire le quotient habituel...

Card (X = - 20) = 3

Card (X = - 5) = 1 × 3 = 3

Card (X = 10) = 2 × 3 = 6

Card (X = 25) = 2 × 1 = 2

Card (X = 40) = 1

Vérification : 3+3+6+6+2+1 =15

La loi de probabilité est donc :

x_i	-20	-5	10	25	40
P(X=x_i)	1/5	1/5	2/5	2/15	1/15

$E(X) = -4 -1 + 4 + 50/15 + 40/15 = 5$ donc le gain moyen est de 5 €.

$E(X^2) = 400/5 + 25/5 + 200/5 + 1250/15 + 1600/15 = 80 + 5 + 40 + 190 = 315$

$V(X) = 315 - 25 = 290$

sur un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G
" x_i "	-20	-5	10	25	40	0	0
"P(X= x_i)"	1/5	1/5	2/5	2/15	2/15	1/15	0
0	-4	-1	4	10/3	8/3	5	
0	400	25	100	625	1600	2750	
0	80	5	40	250/3	320/3	315	
0	0	0	0	0	0	'variance'	290